

# 一类捕食食饵模型正解的定性分析和数值模拟\*

王利娟, 姜洪领

(宝鸡文理学院数学与信息科学学院, 陕西 宝鸡 721013)

**摘要:** 研究了一类具有扩散的捕食食饵模型的平衡态正解。利用极值原理得到正解的先验估计。通过局部分歧理论给出了局部分歧解的存在性。运用全局分歧理论证明局部分歧解可以延拓为全局分歧解, 并得到了全局分歧解的走向, 从而得到了正解存在的充要条件。利用稳定性理论研究了局部分歧解的稳定性。最后通过数值模拟验证和完善已得到的理论结果。

**关键词:** 捕食食饵; 分歧; 稳定性; 数值模拟

**中图分类号:** O175.26 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2015)04-0055-08

## Qualitative Analysis and Numerical Simulation of Positive Solutions for a Predator-Prey Model

WANG Lijuan, JIANG Hongling

(Baoji University of Arts and Sciences, Institute of Mathematics and Information Science, Baoji 721013, China)

**Abstract:** The steady state positive solutions of a predator-prey model with diffusion are studied. A priori estimate for positive solutions is obtained by using maximum principle. Applying to the local bifurcation theory, the existence of local bifurcation solutions is given. It follows from the global bifurcation theory that the local bifurcation solution can be extended to global bifurcation solution and the trend is obtained. Then a necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions is obtained. By the stability theory, the stability of local bifurcation solutions is investigated. Finally, the theoretical results are verified and complemented by the numerical simulation.

**Key words:** predator-prey; bifurcation; stability; numerical simulation

文 [1] 给出如下捕食食饵模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = r_1 u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - f(u)v, \\ \frac{dv}{dt} = r_2 v \left(1 - \frac{v}{\gamma u}\right) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $f(u) = qu/(a+u)$  为 Holling-II 型功能反应函数。各参数生物意义为

- $u(t), v(t)$  分别表示食饵和捕食者的密度;
- $r_1, r_2$  表示内禀增长率;
- $k$  表示食饵的环境承载量;
- $\gamma$  表示捕食者成功捕获食饵的系数;
- $q$  表示捕食者单位时间捕食食饵的最大值;

$a$  表示食饵的半饱和密度。

对该模型的研究结果比较多<sup>[1-4]</sup>。考虑到空间中物种由高密度向低密度的自然移动, 该模型可用如下反应扩散方程组来表示 (无量纲化后)

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = u(\alpha - u) - f(u)v, \\ v_t - d_2 \Delta v = v(\delta - \frac{v}{u}) \end{cases} \quad (2)$$

$\Delta u, \Delta v$  模拟物种的扩散, 常数  $d_i (i = 1, 2)$  分别表示物种  $u$  和  $v$  的扩散系数。目前关于模型的大部分工作都是假设功能函数  $f(u)$  仅仅与食饵  $u$  有关。如在文 [5-7] 中, 作者研究了  $f(u) = \beta u$  的情

\* 收稿日期: 2014-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11201277, 11401356); 陕西省教育厅科研计划资助项目 (14JK1035, 14JK1862); 宝鸡文理学院重点科研资助项目 (ZK12043, ZK15038)

作者简介: 王利娟 (1982 生), 女; 研究方向: 应用偏微分方程; E-mail: lijuanw82@163.com

形。文献 [5] 在齐次 Neumann 边界条件下讨论了模型 (2) 平衡态正解的存在性, 并与经典的 Lotka-Volterra 捕食食饵模型进行了对比。在文 [6-7] 中, 模型 (2) 第一个方程中  $u^2$  的系数为非负函数, 讨论了该模型正解的渐近行为和平衡态正解的惟一性及其稳定性。文 [8-10] 研究了  $f(u)$  为 Holling-II 型功能反应函数的情形。在文 [8-9] 中, 讨论了齐次 Neumann 边界条件下该模型非常数正解的存在性和不存在性, 惟一正常数解的局部和全局稳定性。文 [10] 研究了交叉扩散对模型平衡态的影响。文 [11] 研究了功能反应函数  $f(u)$  满足  $f(0) = 0$ , 且存在正常数  $M > 0$ , 使得当  $u > 0$  时, 有  $0 < f_u(u) \leq M$  的情形, 分析了平衡态非常数正解的存在性和不存在性。

在上面的研究中, 功能函数  $f(u)$  只与食饵  $u$  有关, 即只考虑食饵作用而忽视捕食者以及捕食者-食饵关系对模型的影响作用。然而这种只考虑食饵作用的捕食-食饵模型在解释生态现象时是有缺陷的, 例如 Rosenzweig 在其论文中提到食饵充足时引起的捕食者功能退化现象。因此功能函数  $f(u)$  应该含有食饵  $u$  和捕食者  $v$  “更多的信息”, 更详细分析参见文献 [12-13]。因此众多学者采用 Beddington-DeAngelis 函数  $f(u, v) = \beta u / (1 + au + bv)$  (简称 B-D) 作为功能函数。它既考虑到捕食者内部的相互干扰, 又避免了低密度问题引起的争议, 更好地反映了种群间的相互作用。例如文 [14] 研究了一类带有 B-D 功能函数的竞争模型正解的存在性和惟一性。文 [15] 讨论了带有 B-D 功能函数的 Lotka-Volterra 捕食模型, 得到了模型正解的多重性和惟一性。与文 [15] 中的模型不同的是, 模型 (2) 中的捕食者具有自控行为, 体现在方程中即是  $v^2/u$  项。在齐次 Dirichlet 边界条件下, 由于处理  $v^2/u$  在边界上的奇性比较困难, 所以目前对具有 B-D 型功能反应函数的模型 (2) 在齐次 Dirichlet 边界条件下的研究结果很少, 因此本文研究下面带有扩散项的捕食食饵模型

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = u \left( \alpha - u - \frac{\beta v}{1 + au + bv} \right), \\ x \in (0, l), t > 0, \\ v_t - d_2 v_{xx} = v \left( \delta - \frac{v}{u} \right), x \in (0, l), t > 0, \\ u(0, t) = v(l, t) = 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq, \neq 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq, \neq 0, x \in (0, l) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $u, v$  分别代表食饵和捕食者的密度, 常数  $d_1,$

$d_2$  分别是  $u, v$  的扩散系数, 参数  $\alpha, \beta, a, b, \delta$  均为正常数。模型 (3) 的平衡态系统为

$$\begin{cases} -d_1 u_{xx} = u \left( \alpha - u - \frac{\beta v}{1 + au + bv} \right), x \in (0, l), \\ -d_2 v_{xx} = v \left( \delta - \frac{v}{u} \right), x \in (0, l), \\ u(0) = v(0) = u(l) = v(l) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

记  $\lambda_1$  为  $-d^2/dx^2$  在齐次 Dirichlet 边界条件下的主特征值, 对应的主特征函数为  $\varphi_1(x) > 0, x \in (0, l)$ 。则当  $\alpha > d_1 \lambda_1$  时, 系统 (4) 有半平凡解  $(\theta, 0)$ , 其中  $\theta$  为方程

$$-d_1 u_{xx} = u(\alpha - u), x \in (0, l); u(0) = u(l) = 0$$

的惟一正解, 且  $0 < \theta < \alpha, x \in (0, l)$ 。

## 1 局部分歧解的存在性

为了利用局部分歧理论讨论系统 (4) 局部分歧解的存在性, 系统 (4) 第二个方程中的  $v/u$  必须具有适当的光滑性, 因此先考虑如下特殊函数  $g(x)$ , 其满足

$$g \in C^1[0, l], g > 0, x \in (0, l), \\ g(0) = g(l) = 0, g'(0) > 0, g'(l) < 0 \quad (5)$$

引理 1<sup>[16]</sup> 若  $u$  满足条件 (5) 且  $v \in C_0^1[0, l]$ , 则存在常数  $\kappa > 0$ , 使得  $v \leq \kappa u, x \in [0, l]$ 。

令  $w = v/u$ 。若  $u, v$  都满足 (5), 那么由引理 1 知, 存在正常数  $\kappa_1, \kappa_2$ , 使得  $\kappa_1 \leq w \leq \kappa_2, x \in (0, l)$ 。由 Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} w(x) = \frac{v'(0)}{u'(0)} > 0, \lim_{x \rightarrow l^-} w(x) = \frac{v'(l)}{u'(l)} > 0$$

因此可将  $w(x)$  连续延拓为

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} v(x)/u(x), & x \in (0, l), \\ v'(x)/u'(x), & x = 0, l \end{cases}$$

引理 2<sup>[16]</sup> 若  $u(x), v(x), y(x)$  满足 (5), 那么 (i)  $\bar{w} \in C^1(0, l) \cap C[0, l]$ ; (ii)  $y\bar{w} \in C^1[0, l]$ 。运用极值原理易得正解的先验估计。

引理 3 若  $(u(x), v(x))$  是问题 (4) 的正解, 则  $0 < u(x) < \alpha, 0 < v(x) < \delta\alpha, x \in (0, l)$ 。特别, 当  $\alpha > \lambda_1 d_1$  时,  $0 < u(x) < \theta, x \in (0, l)$ 。

由引理 3 知, 对于给定的  $\delta, v$  的上界可能与  $\delta$  有关。下面的引理 4 表明在适当条件下,  $\delta$  充分大时, 存在与  $\delta$  无关的上界。

引理 4 若  $(u(x), v(x))$  是问题 (4) 的正解, 且  $\alpha < d_1 \lambda_1 + \beta/b$ , 则当  $\delta$  充分大时, 存在不依赖  $\delta$  的常数  $M > 0$ , 使得  $v < M$ 。

证明 假设结论不成立, 则存在  $\delta_n \rightarrow \infty$  和对应于  $\delta = \delta_n$  的系统 (4) 的非负解列  $\{(u_n, v_n)\}$ , 使

得  $v_n \rightarrow \infty$ ，且满足

$$\begin{aligned}
 -d_1 u_{n,xx} &= u_n \left( \alpha - u_n - \frac{\beta v_n}{1 + au_n + bv_n} \right), x \in (0, l); \\
 u_n(0) &= u_n(l) = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

由引理 3 知,  $0 \leq u_n \leq \alpha$ , 因此  $u_n$  存在收敛子列, 仍记为  $u_n$ . 不妨设  $u_n \rightarrow \tilde{u} (n \rightarrow \infty)$ , 则  $0 \leq \tilde{u} \leq \alpha$ . 在方程 (6) 中, 令  $n \rightarrow \infty$ , 则

$$\begin{aligned}
 -d_1 \tilde{u}_{xx} &= \tilde{u} \left( \alpha - \tilde{u} - \frac{\beta}{b} \right), x \in (0, l); \\
 \tilde{u}(0) &= \tilde{u}(l) = 0
 \end{aligned}$$

由于  $\alpha < d_1 \lambda_1 + \beta/b$ , 那么  $\tilde{u} \equiv 0$ , 即  $u_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 令  $U_n = u_n / \|u_n\|_\infty$ , 则  $U_n$  满足

$$\begin{aligned}
 -d_1 U_{n,xx} &= U_n \left( \alpha - u_n - \frac{\beta v_n}{1 + au_n + bv_n} \right), \\
 x \in (0, l); U_n(0) &= U_n(l) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

不妨设  $U_n \rightarrow U$ , 则  $U \geq 0$  且  $\|U\|_\infty = 1$ . 在 (7) 中令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $U$  满足

$$-d_1 U_{xx} = U \left( \alpha - \frac{\beta}{b} \right), x \in (0, l); U(0) = U(l) = 0$$

由  $\alpha < d_1 \lambda_1 + \beta/b$  得  $U \equiv 0, x \in [0, l]$ . 这与  $\|U\|_\infty = 1$  矛盾. 引理得证.

利用特征值变分原理可以得到下面正解存在的必要条件.

**定理 5** 若问题 (4) 存在正解, 则  $\alpha > \lambda_1 d_1$  且  $\delta > \lambda_1 d_2$ .

**证明** 设  $(u, v)$  是问题 (4) 的一个正解, 则  $(u, v)$  满足方程组 (4). 在 (4) 的第一个方程左右两边同乘以  $\varphi_1$ , 并在  $(0, l)$  上积分得

$$-\int_0^l d_1 \varphi_1 u_{xx} dx = \int_0^l u \left( \alpha - u - \frac{\beta v}{1 + au + bv} \right) \varphi_1 dx$$

整理可得

$$\int_0^l (\alpha - \lambda_1 d_1) u \varphi_1 dx = \int_0^l \left( u + \frac{\beta v}{1 + au + bv} \right) u \varphi_1 dx$$

由  $\varphi_1 > 0$  可知  $\alpha > \lambda_1 d_1$ . 同理有  $\delta > \lambda_1 d_2$ .

下面运用局部分歧理论分析系统 (4) 在半平凡解  $(\theta, 0)$  处产生的局部分歧解.

令  $\omega = \theta - u, \chi = v$ , 于是系统 (4) 可变换为如下形式

$$\begin{cases}
 -d_1 \omega_{xx} = (\alpha - 2\theta)\omega + \frac{\beta\theta}{1 + a\theta} \chi + F_1(\omega, \chi), \\
 \quad \quad \quad x \in (0, l), \\
 -d_2 \chi_{xx} = \delta\chi + F_2(\omega, \chi), x \in (0, l), \\
 \omega(0) = \chi(0) = \omega(l) = \chi(l) = 0
 \end{cases} \tag{8}$$

其中

$$F_1(\omega, \chi) = -\frac{\beta\theta}{1 + a\theta} \chi + \frac{(\theta - \omega)\beta\chi}{1 + a(\theta - \omega) + b\chi} +$$

$$\omega^2, \quad F_2(\omega, \chi) = -\frac{\chi^2}{\theta - \omega}$$

因此  $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0, D_{(\omega, \chi)} F_1|_{(0, 0)} = D_{(\omega, \chi)} F_2|_{(0, 0)} = 0$ . 显然研究平衡态问题 (4) 正解  $0 < u(x) < \theta, v(x) > 0, x \in (0, l)$  的存在性和稳定性可转化为研究问题 (8) 正解  $0 < w(x) < \theta, \chi(x) > 0, x \in (0, l)$  的存在性和稳定性.

令  $\delta^*$  是特征值问题  $-d_2 \chi_{xx} = \lambda \chi, x \in (0, l), \chi(0) = \chi(l) = 0$  的主特征值, 对应主特征函数为  $\chi_1 > 0$ , 则  $\delta^* = \lambda_1 d_2 > 0$ . 记  $X = C_0^1(0, l) \times C_0^1(0, l)$ . 定义算子

$$\begin{aligned}
 T(\delta, \omega, \chi) &= \left[ \alpha K_1 \omega - 2K_1(\theta\omega) + \right. \\
 &\quad \left. \beta K_1 \left( \frac{\theta\chi}{1 + a\theta} \right) + K_1 F_1, \delta K_2 \chi + K_2 F_2 \right]^T
 \end{aligned}$$

其中  $K_i (i = 1, 2)$  是  $-d_i (d^2/dx^2)$  在  $C_0^1(0, l)$  的逆算子, 那么  $T: \mathbf{R} \times X \rightarrow X$  是紧的连续微分算子. 令  $G(\delta, \omega, \chi) = (\omega, \chi)^T - T(\delta, \omega, \chi)$ , 则  $G(\delta, \omega, \chi) = 0$  的非负解对应于方程组 (8) 的非负解, 且  $G(\delta, 0, 0) = 0$ .

**定理 6** 设  $\alpha > \lambda_1 d_1$ , 则  $(\delta^*, \theta, 0)$  是方程组 (4) 的一个分歧点, 且在  $(\delta^*, \theta, 0)$  的邻域内 (4) 存在正解.

**证明** 令  $L(\delta^*, 0, 0) = D_{(\omega, \chi)} G(\delta^*, 0, 0)$ , 则由  $L(\delta^*, 0, 0)(\omega, \chi)^T = 0$  可知

$$\begin{cases}
 d_1 \omega_{xx} + (\alpha - 2\theta)\omega + \frac{\beta\theta}{1 + a\theta} \chi = 0, x \in (0, l), \\
 d_2 \chi_{xx} + \delta^* \chi = 0, x \in (0, l), \\
 \omega(0) = \chi(0) = \omega(l) = \chi(l) = 0
 \end{cases}$$

因此  $\chi = \chi_1, \omega = \omega_1 = [-d_1 \Delta + (2\theta - \alpha)]^{-1} (\beta\theta \chi_1 / (1 + a\theta)) > 0$ . 从而  $N(L(\delta^*, 0, 0)) = \text{span}\{(\omega_1, \chi_1)^T\}$ . 记  $L^*(\delta^*, 0, 0)$  为  $L(\delta^*, 0, 0)$  的伴随算子, 则

$$L^*(\delta^*, 0, 0) = \begin{bmatrix} I - \alpha K_1 - 2K_1(\theta) & 0 \\ -\beta K_1 \left( \frac{\theta}{1 + a\theta} \right) & I - \delta K_2 \end{bmatrix}$$

由  $L^*(\delta^*, 0, 0)(\omega, \chi)^T = 0$  得  $N(L^*(\delta^*, 0, 0)) = \text{span}\{(0, \chi_1)\}$ . 再由 Fredholm 选择公理知

$$R(L^*(\delta^*, 0, 0)) = \{(\omega, \chi) \in X: \int_0^l \omega \chi_1 dx = 0\}$$

所以  $\text{codim} R(L^*(\delta^*, 0, 0)) = 1$ .

令  $L_1(\delta^*, 0, 0) = D_\delta D_{(\omega, \chi)} G(\delta^*, 0, 0)$ , 则  $L_1(\delta^*, 0, 0)(\omega_1, \chi_1)^T = (0, -K_2 \chi_1)^T$ , 显然  $L_1(\delta^*, 0, 0)(\omega_1, \chi_1)^T \notin R(L(\delta^*, 0, 0))$ .

由局部分歧定理知, 存在充分小的  $\varepsilon > 0$  以及

$C^1$  函数  $(\delta(s), \varphi(s), \psi(s)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R} \times X$ , 使得  $\delta(0) = \delta^*$ ,  $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ , 且  $(\delta(s), \omega(s), \chi(s)) = (\delta(s), s(\omega_1 + \varphi(s)), s(\chi_1 + \psi(s)))$  满足  $G(\delta(s), \omega(s), \chi(s)) = 0$ , 其中  $X = Z \oplus \text{span}\{(\omega_1, \chi_1)^T\}$ , 因此  $(\delta(s), U(s), V(s)) (|s| < \varepsilon)$  是 (4) 的分歧解, 其中  $U(s) = \theta - s(\omega_1 + \varphi(s)), V(s) = s(\chi_1 + \psi(s))$ . 若取  $0 < s < \varepsilon$ , 则它恰好为 (4) 的正解. 而且, 在分歧点  $(\delta^*, \theta, 0)$  附近的非平凡非负解或者在分支  $\{(\delta, \theta, 0) \mid \delta \in \mathbf{R}^+\}$  上, 或者在分支  $\{(\delta(s), U(s), V(s)) \mid 0 < s < \varepsilon\}$  上.

## 2 局部分歧解的延拓

下面利用全局分歧理论分析分歧解的全局性.

**定理 7** 设  $\alpha > \lambda_1 d_1$ , 则定理 6 给出的局部分歧解可以沿  $\delta$  延拓为全局分歧解.

**证明** 令  $T'(\delta) = D_{(\omega, \chi)} T(\delta, 0, 0)$ , 则

$$T'(\delta)(\omega, \chi)^T = \begin{bmatrix} \alpha K_1 \omega - 2K_1(\theta \omega) + \beta K_1 \left( \frac{\theta \chi}{1 + a\theta} \right) \\ \delta K_2 \chi \end{bmatrix}$$

设  $\mu \geq 1$  是  $T'(\delta)$  的一个特征值, 则有

$$\begin{cases} -\mu d_1 \omega_{xx} = (\alpha - 2\theta)\omega + \frac{\beta\theta}{1 + a\theta} \chi, x \in (0, l), \\ -\mu d_2 \chi_{xx} = \delta \chi, x \in (0, l), \\ \omega(0) = \chi(0) = \omega(l) = \chi(l) = 0 \end{cases}$$

若  $\chi \equiv 0$ , 则  $-\mu d_1 \omega_{xx} = (\alpha - 2\theta)\omega, x \in (0, l)$ . 由于  $(-\mu d_1 (d^2/dx^2) - \alpha + 2\theta)$  的特征值都大于 0, 那么  $\omega \equiv 0$ , 因此  $\chi \equiv 0$ . 于是存在某个  $i$ , 使得  $\delta = \delta_i(\mu)$ , 其中  $\delta_i(\mu)$  是  $-\mu d_i \chi_{xx} = \delta \chi$  的特征值. 显然,  $\delta_i(\mu)$  关于  $\mu$  在  $[1, +\infty)$  上递增, 且  $\delta_i(\mu)$  满足

$$\begin{aligned} 0 < \delta_1(\mu) < \delta_2(\mu) \leq \delta_3(\mu) \leq \\ \cdots \rightarrow +\infty, \delta_1(1) &= \delta^* \end{aligned}$$

另一方面, 如果  $\mu \geq 1$ , 则算子  $(-\mu d_1 (d^2/dx^2) - \alpha + 2\theta)$  的特征值都大于 0, 从而  $\omega = (-\mu d_1 (d^2/dx^2) - \alpha + 2\theta)^{-1} (\beta\theta\chi / (1 + a\theta))$ . 因此  $\mu \geq 1$  为  $T'(\delta)$  的特征值当且仅当存在某个  $i$ , 使得  $\delta = \delta_i(\mu)$ .

假设  $\delta < \delta^*$ , 则对任意  $\mu \geq 1, i \geq 1$ , 有  $\delta < \delta_i(1) \leq \delta_i(\mu)$ . 因此  $T'(\delta)$  没有大于或等于 1 的特征值, 故当  $\delta < \delta^*$  时,  $\text{index}(T(\delta, \cdot), 0) = 1$ .

假设  $\delta^* < \delta < \delta_2(1)$ , 则对任意  $\mu \geq 1, i \geq 2$ , 有  $\delta < \delta_i(\mu)$ . 又  $\delta_1(1) = \delta^*, \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \delta_1(\mu) = +\infty$ , 且  $\delta_1(\mu)$  关于  $\mu$  严格递增, 因此存在惟一的  $\hat{\mu} > 1$ , 使

得  $\delta = \delta_1(\hat{\mu})$ , 于是

$$\begin{aligned} N(\hat{\mu}I - T'(\delta)) &= \text{span}\{(\bar{\omega}, \bar{\chi})\}, \\ \dim N(\hat{\mu}I - T'(\delta)) &= 1, \end{aligned}$$

$$\bar{\omega} = (-\hat{\mu}d_1 (d^2/dx^2) - \alpha + 2\theta)^{-1} \left( \frac{\beta\theta}{1 + a\theta} \bar{\chi} \right)$$

其中  $\bar{\chi} > 0$  为如下特征值问题的主特征函数

$$\begin{aligned} \hat{\mu}d_2 \bar{\chi}_{xx} + \delta \bar{\chi} &= 0, x \in (0, l); \\ \bar{\chi}(0) = \bar{\chi}(l) &= 0 \end{aligned}$$

下面证明  $R(\hat{\mu}I - T'(\delta)) \cap N(\hat{\mu}I - T'(\delta)) = 0$ .

假设上式不成立, 则  $(\bar{\omega}, \bar{\chi}) \in R(\hat{\mu}I - T'(\delta))$ , 那么存在  $(\omega, \chi) \in X$ , 使得  $(\hat{\mu}I - T'(\delta))(\omega, \chi) = (\bar{\omega}, \bar{\chi})$ , 因此

$$\begin{aligned} \hat{\mu}d_2 \chi_{xx} + \delta \chi &= d_2 \bar{\chi}_{xx}, x \in (0, l); \\ \chi(0) = \chi(l) &= 0 \end{aligned}$$

上式两边同乘以  $\bar{\chi}$ , 并在  $(0, l)$  上积分可得

$$\begin{aligned} d_2 \int_0^l \bar{\chi} \chi_{xx} dx &= \int_0^l (\hat{\mu}d_2 \chi_{xx} + \delta \chi) \bar{\chi} dx = \\ \int_0^l (\hat{\mu}d_2 \bar{\chi}_{xx} + \delta \bar{\chi}) \chi dx &= 0 \end{aligned}$$

但

$$d_2 \int_0^l \bar{\chi} \chi_{xx} dx = \int_0^l \bar{\chi} \left( -\frac{\delta}{\hat{\mu}} \bar{\chi} \right) dx = -\int_0^l \frac{\delta}{\hat{\mu}} \bar{\chi}^2 dx < 0$$

这与上式矛盾. 因此  $\hat{\mu}$  的代数重数为 1, 故当  $\delta^* < \delta < \delta_2(1)$  时,  $\text{index}(T'(\delta, \cdot), 0, 0) = -1$ .

由全局分歧理论知, 在  $\mathbf{R}^+ \times Z$  内, 存在从  $(\delta^*, \theta, 0)$  出发的连通分支  $\Gamma_0$  满足  $G(\delta, \omega, \chi) = 0$ , 且在点  $(\delta^*, \theta, 0)$  附近,  $G(\delta, \omega, \chi) = 0$  的所有零点都在定理 6 给出的那条分支曲线上. 定理 7 的结论成立.

记  $\Gamma_1 = \Gamma_0 - \{(\delta(s), s(\omega_1 + \varphi(s)), s(\chi_1 + \psi(s))) : -\varepsilon < s < 0\}$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(\delta, U, V) : U = \theta - \omega, \\ V = \chi, (\delta, \omega, \chi) \in \Gamma_1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \{u \in C^1(0, l) : u > 0, x \in (0, l); \\ u'(0) > 0, u'(l) < 0\}, \end{aligned}$$

$$P = \{(\delta, u, v) : \delta \in \mathbf{R}, (u, v) \in P_1 \times P_1\}$$

那么  $\Gamma$  为问题 (4) 由  $(\delta^*, \theta, 0)$  出发的解曲线, 且在  $(\delta^*, \theta, 0)$  的小邻域内有  $\Gamma \subset P$ . 下面给出连通分支  $\Gamma$  在正锥  $P$  内的走向.

**定理 8** 设  $\lambda_1 d_1 < \alpha < \lambda_1 d_1 + \beta/b$ , 则连通分支  $\Gamma$  在正锥  $P$  内沿  $\delta$  延伸到  $\infty$ .

**证明** 由全局分歧理论知, 连通分支  $\Gamma - \{(\delta^*, \theta, 0)\}$  满足下列条件之一:

(i)  $\Gamma$  连接了分歧点  $(\delta^*, \theta, 0)$  和  $(\hat{\delta}, \theta, 0)$ , 其中  $I - T'(\hat{\delta})$  不可逆, 且  $\hat{\delta} \neq \delta^*$ .

(ii)  $\Gamma$  在  $\mathbf{R} \times X$  内由  $(\delta^*, \theta, 0)$  延伸到无穷.

(iii)  $\Gamma$  包含形如  $(\delta, \theta - u, v)$  和  $(\delta, \theta + u, -v)$  的点, 其中  $(u, v) \neq 0$ 。

下面证明  $\Gamma - \{(\delta^*, \theta, 0)\} \subset P$ 。假设  $\Gamma - \{(\delta^*, \theta, 0)\} \not\subset P$ , 则存在点  $(\hat{\delta}, \hat{u}, \hat{v}) \in (\Gamma - \{(\delta^*, \theta, 0)\}) \cap \partial P$  和序列  $(\delta_n, u_n, v_n) \subset \Gamma \cap P, u_n > 0, v_n > 0$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,  $(\delta_n, u_n, v_n) \rightarrow (\hat{\delta}, \hat{u}, \hat{v})$ 。易知  $\hat{u} \in \partial P_1$  或者  $\hat{v} \in \partial P_1$ 。

假设  $\hat{u} \in \partial P_1$ , 那么  $\hat{u} \geq 0, x \in [0, l]$ , 则或者存在  $x_0 \in (0, l)$  使得  $\hat{u}(x_0) = 0$ , 或者  $u'(0) \cdot u'(l) = 0$ 。由于  $\hat{u}$  满足

$$-d_1 \hat{u}_{xx} = \left( \alpha - \hat{u} - \frac{\beta \hat{v}}{1 + a\hat{u} + b\hat{v}} \right) \hat{u},$$

$$x \in (0, l); \quad \hat{u}'(0) = \hat{u}'(l) = 0$$

利用极值原理得  $\hat{u} \equiv 0$ , 这与方程组 (4) 的第二个方程矛盾, 故  $\hat{v} \in \partial P_1$ 。类似地可得  $\hat{v} \equiv 0$ , 从而  $\hat{u} \equiv \theta$ 。因此当  $n \rightarrow \infty$  时,  $(\delta_n, u_n, v_n) \rightarrow (\hat{\delta}, \theta, 0)$ 。

令  $\bar{v}_n = v_n / \|v_n\|$ , 那么  $\bar{v}_n$  满足

$$-d_2 \bar{v}_{n,xx} = \bar{v}_n \left( \delta_n - \frac{v_n}{u_n} \right), x \in (0, l);$$

$$\bar{v}_n'(0) = \bar{v}_n'(l) = 0 \quad (9)$$

由引理 1 及  $L^p$  估计得  $\bar{v}_n \in W_p^2(0, l)$ 。应用 Sobolev 嵌入定理知  $\bar{v}_n \in C^1[0, l]$ 。又根据引理 2 知,  $\bar{v}_n \cdot v_n / u_n \in C^1[0, l]$ , 然后运用 Schauder 估计可得  $\bar{v}_n \in C^2[0, l]$ 。从而存在  $\bar{v}_n$  的收敛子列仍记为  $\bar{v}_n$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\bar{v}_n \rightarrow \bar{v}$  在  $C_0^2[0, l]$  成立, 且  $\bar{v} \geq 0, \neq 0, x \in [0, l]$ 。因此对方程 (9) 两边求极限得

$$-d_2 \bar{v}_{xx} = \hat{\delta} \bar{v}, x \in (0, l); \bar{v}'(0) = \bar{v}'(l) = 0$$

从而得  $\hat{\delta} = \delta^*$ , 这与  $\hat{\delta} \neq \delta^*$  矛盾。因此  $C - \{(\delta^*, \theta, 0)\} \subset P$ 。那么连通分支  $\Gamma$  满足 (ii)。另外, 由引理 3 和引理 4 知  $0 < U < \alpha, 0 < V < M$ 。再次利用  $L^p$  估计, Sobolev 嵌入定理知, 存在常数  $D > 0$ , 使得  $\|U\|_{C^1}, \|V\|_{C^1} \leq D$ 。因此  $\Gamma$  在正锥内沿参数  $\delta$  延伸到无穷。

**注 1** 若定理 8 中的条件改为  $\alpha > \lambda_1 d_1$ , 则结论为连通分支  $\Gamma$  在正锥  $P$  内延伸到无穷, 只是不能确定延伸的具体方向。

由定理 5, 定理 8, 注 1 及  $\delta^* = \lambda_1 d_2$  可得下述定理。

**定理 9** 方程组 (4) 存在正解的充分必要条件是  $\alpha > \lambda_1 d_1$  且  $\delta > \lambda_1 d_2$ 。

### 3 分歧解的稳定性

下面讨论局部分歧解的稳定性。令  $X_1 = (C^{2,\alpha}[0, l] \times C^{2,\alpha}[0, l]) \cap X, Y = C^\alpha[0, l] \times$

$C^\alpha[0, l]$ , 其中  $0 < \alpha < 1$ 。  $i: X \rightarrow Y$  为  $X_1$  到  $Y$  的包含映射。设  $L$  是 (4) 在  $(\delta^*, \theta, 0)$  的线性化算子, 由定理 6 的证明可知  $N(L) = \text{span}\{(-\omega_1, \chi_1)\}$ ,  $\text{codim}R(L) = 1, R(L) = \{(u, v) \in X: \int_0^l v \chi_1 dx = 0\}$ 。又因为  $i(\omega_1, \chi_1) \in R(L)$ , 所以 0 是  $L$  的  $i$ -单重特征值。

**引理 10** 0 是  $L$  的实部最大的特征值, 且其他的特征值均在左半复平面上。

**证明** 由于 0 是  $L$  的特征值, 所以只需证明 0 是实部最大的特征值。

假设  $\lambda_0$  是  $L$  的实部大于 0 的特征值, 相应的特征函数记为  $(\varphi, \psi)$ , 则

$$\begin{cases} d_1 \varphi_{xx} + (\alpha - 2\theta)\varphi - \frac{\beta\theta}{1 + a\theta}\psi = \lambda_0 \varphi, x \in (0, l), \\ d_2 \psi_{xx} + \delta^* \psi = \lambda_0 \psi, x \in (0, l), \\ \varphi(0) = \psi(0) = \varphi(l) = \psi(l) = 0 \end{cases}$$

若  $\psi \equiv 0$ , 则  $\lambda_0$  是算子  $d_1(d^2/dx^2) + (\alpha - 2\theta)I$  的一个特征值, 那么  $\lambda_0 \in \mathbf{R}$  且  $\lambda_0 < 0$ , 与假设矛盾。因此  $\psi \neq 0$ , 那么  $\lambda_0$  是算子  $d_2(d^2/dx^2) + \delta^* I$  的一个特征值, 从而  $\lambda_0 \leq 0$ , 与假设矛盾。

由线性算子稳定性理论知, 在  $\delta^*$  和 0 的邻域内存在  $C^1$  函数  $\delta \rightarrow (\gamma(\delta), \zeta(\delta)) \in \mathbf{R} \times X$  和  $s \rightarrow (\eta(s), \tau(s)) \in \mathbf{R} \times X_1$ , 使得  $(\gamma(\delta^*), \zeta(\delta^*)) = (0, (\omega_1, \chi_1)) = (\eta(0), \tau(0))$ , 并且

$$L(\delta, \theta, 0)\zeta(\delta) = \gamma(\delta)\zeta(\delta), |\delta - \delta^*| \ll 1,$$

$$L(\delta(s), U(s), V(s))\tau(s) = \eta(s)\tau(s), 0 < s \ll 1$$

其中  $\zeta(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)), \tau(s) = (v_1(s), v_2(s))$ 。

另外,  $\gamma'(\delta^*) \neq 0$ 。又若  $\eta(s) \neq 0 (|s| \ll 1)$ , 则

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\delta'(s)\gamma'(\delta^*)}{\eta(s)} = -1$$

特征值  $\eta(s)$  的符号可以决定分歧解  $(U(s), V(s))$  的稳定性。当  $\eta(s) < 0$  时, 分歧解是稳定的; 当  $\eta(s) > 0$  时, 分歧解是不稳定的。而  $\eta(s)$  的符号与  $s\delta'(s)\gamma'(\delta^*)$  的符号相反, 因此可以通过判断  $s\delta'(s)\gamma'(\delta^*)$  的符号来判断分歧解  $(U(s), V(s))$  的稳定性。

**引理 11**  $\gamma'(\delta^*) > 0$ 。

**证明** 由  $L(\delta, \theta, 0)\zeta(\delta) = \gamma(\delta)\zeta(\delta)$  知

$$\begin{cases} d_1 u_{1,xx} + (\alpha - 2\theta)u_1 - \frac{\beta\theta}{1 + a\theta}u_2 = \gamma(\delta)u_1, \\ x \in (0, l); \\ d_2 u_{2,xx} + \delta u_2 = \gamma(\delta)u_2, x \in (0, l); \\ u_1(0) = u_2(0) = u_1(l) = u_2(l) = 0 \end{cases}$$

由于  $|\delta - \delta^*| \ll 1$ , 所以  $|\gamma(\delta)| \ll 1$ 。如果  $u_2 \equiv 0$ , 那么  $u_1 \equiv 0$ , 矛盾。故  $u_2 \neq 0$ 。因此  $\gamma(\delta)$  是算子  $d_2(d^2/dx^2) + \delta I$  的特征值。利用  $\chi_1 > 0$  及  $|\delta - \delta^*| \ll 1$  得  $\gamma(\delta)$  是算子  $d_2(d^2/dx^2) + \delta I$  的主特征值, 且当  $|\delta - \delta^*| \ll 1$  时  $\gamma(\delta)$  关于  $\delta$  单调递增。又因为  $\gamma'(\delta^*) \neq 0$ , 故  $\gamma'(\delta^*) > 0$ 。

引理 12  $\delta'(0) > 0$ 。

证明 将分歧解  $(\delta(s), U(s), V(s)) = (\delta(s), \theta - s(\omega_1 + \varphi(s)), s(\chi_1 + \psi(s)))$  代入 (4) 的第二个方程, 两端同除以  $s$ , 再关于  $s$  求  $s = 0$  处的导数, 得

$$-d_2 \frac{d^2}{dx^2} \psi'(0) = \delta^* \psi'(0) + \chi_1 (\delta'(0) - \frac{\chi_1}{\theta})$$

其中  $\psi'(0)$  为  $\psi(s)$  关于  $s$  在  $s = 0$  处的导数。在上述方程两端同乘以  $\chi_1$  并在  $(0, l)$  上积分, 计算得

$$-d_2 \int_0^l \psi'(0) \frac{d^2}{dx^2} \chi_1 dx =$$

$$\int_0^l \delta^* \psi'(0) \chi_1 dx + \int_0^l \chi_1^2 (\delta'(0) - \frac{\chi_1}{\theta}) dx$$

从而

$$\delta'(0) \int_0^l \chi_1^2 dx = \int_0^l \frac{\chi_1^3}{\theta} dx$$

又由于  $\theta > 0, \chi_1 > 0$ , 得  $\delta'(0) > 0$ 。

由引理 10-12 得下面的局部稳定性定理。

定理 13 若  $0 < s \ll 1$ , 则  $\eta(s) < 0$ , 且定理 6 给出的分歧解  $(U(s), V(s))$  是稳定的。

注 2 定理 9 表明当捕食者和食饵的生长率都适当大时, 两物种才能共存。定理 13 中正解的稳定性是局部的, 其结论表明在定理 6 的条件下, 捕食者和食饵初始状态的微小变化不会影响两物种的共存态。例如应用模型 (3) 研究南极附近海洋中须鲸捕食磷虾时<sup>[17]</sup>, 以上结论表明在给定条件下他们可以产生稳定的共存态。

## 4 数值模拟

本节利用数值模拟技术来验证和完善前面几节得到的理论结果。软件平台为 Matlab (版本为 7.4), 算法为其自带工具箱中的 pdepe 算法函数。系统中的参数  $a, b, \alpha, \beta, \delta, l, d_1, d_2$  取

$$a = 0.6, b = 0.4, \alpha = 7, \beta = 12.4,$$

$$\delta = 1, l = 2\pi, d_1 = 0.3, d_2 = 22 \quad (10)$$

在 (10) 式取值下, 通过改变  $\alpha$  或  $\delta$  的值来观察平衡态非负解的变化。简单计算可得主特征值  $\lambda_1 = 0.25, d_1 \lambda_1 = 0.075, d_2 \lambda_1 = 5.5$ 。食饵  $u$  和捕食者  $v$  的初始投放量为 2: 1, 不失一般性我们设定初始

条件为  $(u_0, v_0) = (2|\sin x|, |\sin x|)$ 。

1) 参数  $\delta$  对平衡态正解的影响。

利用定理 5 易知, 在 (10) 式中变动  $\delta$ , 使得  $\delta \in (0, 5.5)$  时, 系统没有正解, 只有惟一的半平凡解  $(\theta, 0)$ , 这一结论见图 1, 其中  $\delta = 5 < 5.5 = d_2 \lambda_1$ 。图 1 (a) 和图 1 (b) 分别模拟物种  $u, v$  在空间依时间的分布图。从图 1 可以看出当时间  $t$  趋于 1000 时,  $u, v$  物种的种群密度在空间上的分布不再与时间有关, 达到平衡态。图 1 也表明, 当捕食者的生长率太小时, 即使食饵充足, 捕食者也将灭绝。

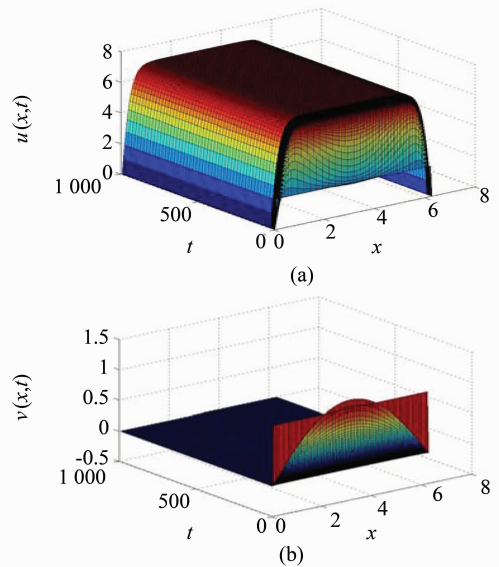


图 1 系统 (4) 的半平凡解

Fig. 1 Semi-trivial solution of the system (4)

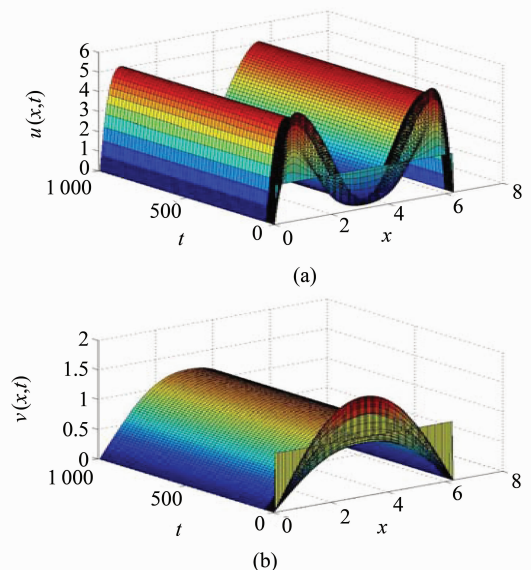


图 2 系统 (4) 的正解

Fig. 2 Positive solution of the system (4)

当  $\delta \in (5.5, +\infty)$  时, 系统存在正解, 见图 2, 其中  $\delta = 7 > 5.5 = d_2\lambda_1$ 。图 2 (a) 和图 2 (b) 分别模拟物种  $u, v$  在空间依时间的分布图。与图 1 类似, 系统达到平衡态, 表明食饵与捕食者可以共存。这与全局分歧定理 7 一致。

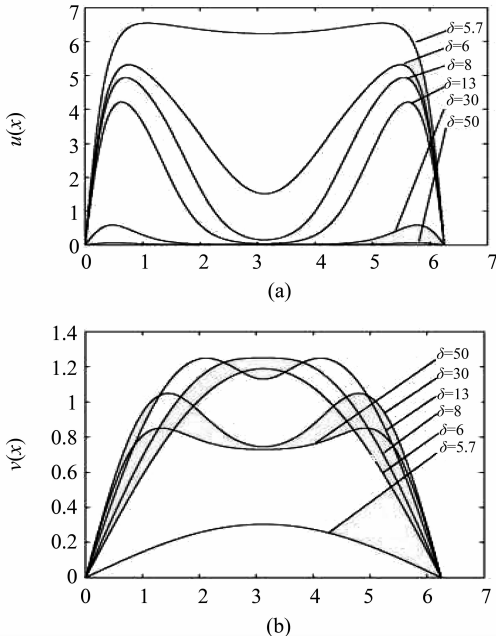


图 3  $\delta$  对平衡态正解的影响, 其中  $\alpha < d_1\lambda_1 + \beta/b$   
 Fig. 3 Effects of  $\delta$  on steady-state positive solutions, where  $\alpha < d_1\lambda_1 + \beta/b$

另外, 当  $\alpha \in (d_1\lambda_1, d_1\lambda_1 + \beta/b)$  时, 大量的模拟结果表明, 随着  $\delta$  的增大, 食饵  $u$  减小, 捕食者  $v$  的最大值有上界且该上界与  $\delta$  无关, 见图 3, 其中  $\alpha = 7 < 31.075 = d_1\lambda_1 + \beta/b, \delta = 5.7, 6, 8, 13, 30, 50$ 。这与引理 4 的结论一致。因此由全局分歧定理 7 给出的分歧曲线在  $\delta U$  平面 ( $U$  轴表示  $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ ) 上不会因  $\delta$  增大而延  $U$  轴趋于无穷, 见图 4 (a)。另一方面, 当  $\alpha \in (d_1\lambda_1 + \beta/b, +\infty)$  时, 取  $\alpha = 40 > 31.075 = d_1\lambda_1 + \beta/b, \delta = 6, 10, 20, 50, 100$  进行数值模拟, 模拟结果见图 5。图 5 表明, 随着  $\delta$  增大, 物种  $u$  减小, 物种  $v$  增大但小于  $\delta\alpha$ 。这说明由全局分歧定理 7 给出的分歧曲线在  $\delta U$  平面上将会因  $\delta$  增大而延  $U$  轴趋于无穷, 见图 4 (b)。

2) 参数  $\alpha$  对平衡态正解的影响。

当  $\alpha \in (0.075, +\infty)$  且  $\delta \in (0, 5.5)$  时, 平衡态系统存在唯一平凡解  $(\theta, 0)$ , 见 1) 中的图 1。当  $\alpha \in (0.075, +\infty)$  且  $\delta \in (5.5, +\infty)$  时, 系统存在平衡态正解。取  $\delta = 7, \alpha = 0.5, 2, 4, 10$  进

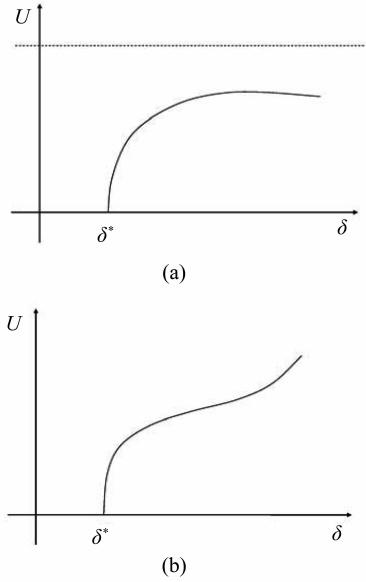


图 4 全局分歧解曲线示意图, 其中  $U$  轴表示  $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$   
 Fig. 4 The diagram of the global bifurcation curve, where  $U$  axis shows  $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$

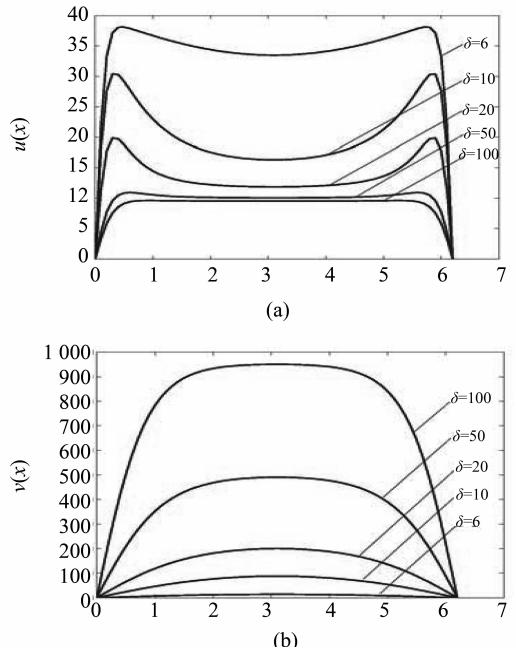


图 5  $\delta$  对平衡态正解的影响, 其中  $\alpha > d_1\lambda_1 + \beta/b$   
 Fig. 5 Effects of  $\delta$  on steady-state positive solutions, where  $\alpha > d_1\lambda_1 + \beta/b$

行数值模拟, 模拟结果见图 6。这里图 6 (a) 和图 6 (b) 分别给出物种  $u, v$  在空间上依时间的分布图。结果表明, 随着  $\alpha$  增大,  $\|u\|_\infty, \|v\|_\infty$  都增大, 但  $\|u\|_\infty < \alpha, \|v\|_\infty < \delta\alpha$ , 这与正解先验估计引理 3 给出的结论一致。

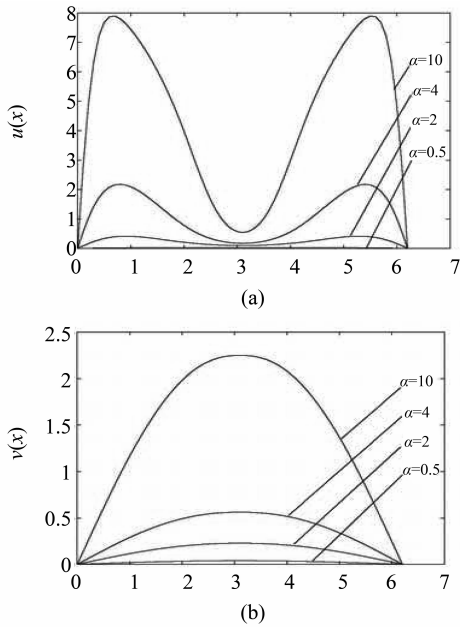


图 6  $\alpha$  对平衡态正解的影响

Fig. 6 Effects of  $\alpha$  on steady-state positive solutions

### 参考文献:

- [1] BRAZA P A. The bifurcation structure of the Holling-Tanner model for predator-prey interactions using two-timing [J]. *SIAM J Appl Math*, 2003, 63(3): 889 – 904.
- [2] MAY R M. *Stability and complexity in model ecosystems* [M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [3] HSU S B, HUANG T W. Global stability for a class of predator-prey systems [J]. *SIAM J Appl Math*, 1995, 55(3): 763 – 783.
- [4] COLLINGS J B. Bifurcation and stability analysis of a temperature-dependent mite predator-prey interaction model incorporating a prey refuge [J]. *Bull Math Biol*, 1995, 57(1): 63 – 76.
- [5] DU Y H, HSU S B. A diffusive predator-prey model in heterogeneous environment [J]. *J Differential Equations*, 2004, 203(2): 331 – 364.
- [6] DU Y H, WANG M X. Asymptotic behavior of positive steady-states to a predator-prey model [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2006, 136(4): 759 – 778.
- [7] PENG R, WANG M X. Uniqueness and stability of steady states for a predator-prey model in heterogeneous environment [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2008, 136(3): 859 – 865.
- [8] PENG R, WANG M X. Positive steady-states of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2005, 135(1): 149 – 164.
- [9] PENG R, WANG M X. Global stability of the equilibrium of a diffusive Holling-Tanner prey-predator model [J]. *Appl Math Lett*, 2007, 20(6): 664 – 670.
- [10] PENG R, WANG M X, YANG G Y. Stationary patterns of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion and cross-diffusion [J]. *Appl Math Comput*, 2008, 196(2): 570 – 577.
- [11] KO W, RYU K. Non-constant positive steady-states of a predator-prey system in homogeneous environment [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 327(1): 539 – 549.
- [12] ABRAMS P, GLNZBURG L. The nature of predation: prey dependent, ratio-dependent, or neither [J]. *Trends Ecology Evolution*, 2000, 15(8): 337 – 341.
- [13] PENG R, WANG M X. Qualitative analysis on a diffusive prey-predator model with ratio-dependent functional response [J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2008, 51(11): 2043 – 2058.
- [14] JIANG H L, WU J H, WANG L J, et al. Qualitative analysis for a competition model with B-D functional response and numerical simulation [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2014, 30(5): 1575 – 1594.
- [15] GUO G H, WU J H. Multiplicity and uniqueness of positive solutions for a predator – prey model with B – D functional response [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2010, 72(3): 1632 – 1646.
- [16] WANG L J, JIANG H L. Properties and numerical simulations of positive solutions for a variable-territory model [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 236: 647 – 662.
- [17] GIORDANO F R, WEIR M D, FOX W P. 数学建模 [M]. 叶其孝, 姜启源, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2005: 335 – 346.